P03b – Logic exercises

Following Russell & Norvig's finding that *"a student of AI must develop a talent for working with logical notation"* [AIMA, p. 290], this lab description collects some exercises to get acquainted with formulating and manipulating known facts in logical notation, and to do inference to arrive at new conclusions. For the sake of keeping the linguistic extravaganza found in one reference[1], some tasks are formulated in German.

1. Working with propositional logic

1.1 Which of the following is correct?[2]

- $False \models True$.
- $True \models False$.
- $(A \wedge B) \models (A \Leftrightarrow B)$.
- $A \Leftrightarrow B \models A \vee B$.
- $A \Leftrightarrow B \models \neg A \vee B$.
- $(A \wedge B) \Rightarrow C \models (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$.
- $(C \vee (\neg A \wedge \neg B)) \equiv ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$.
- $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \models (A \vee B)$.
- $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \models (A \vee B) \wedge (\neg D \vee E)$.
- $(A \vee B) \wedge \neg(A \Rightarrow B)$ is satisfiable (see appendix of V06a).
- $(A \Leftrightarrow B) \wedge (\neg A \vee B)$ is satisfiable.
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ has the same number of models as $(A \Leftrightarrow B)$ for any fixed set of proposition symbols that includes A, B, C.

[1] Materials (script, exercises and exams) of Hellwig Geisse's lecture on „Methoden der KI“ at Fachhochschule Giessen Friedberg, Germany, spring semester 2003 – the AI lecture this lecturer (stdm) had the pleasure to attend during his own studies.
[2] Exercise 7.4 from [AIMA].

1.2 Decide whether each of the following sentences is valid, unsatisfiable, or neither[3]

Verify your decisions using truth tables or the equivalence rules (see V06a).

- Smoke ⇒ Smoke
- Smoke ⇒ Fire
- (Smoke ⇒ Fire) ⇒ (¬Smoke ⇒ ¬Fire)
- Smoke ∨ Fire ∨ ¬Fire
- ((Smoke ∧ Heat) ⇒ Fire) ⇔ ((Smoke ⇒ Fire) ∨ (Heat ⇒ Fire))
- (Smoke ⇒ Fire) ⇒ ((Smoke ∧ Heat) ⇒ Fire)
- Big ∨ Dumb ∨ (Big ⇒ Dumb)

[3] Exercise 7.10 from [AIMA].

1.3 Wumpus world navigation[4]

Suppose an agent has progressed to the following point, having perceived nothing in [1,1], a breeze in [2,1], and a stench in [1,2], and is now concerned with the contents of [1,3], [2,2], and [3,1]:

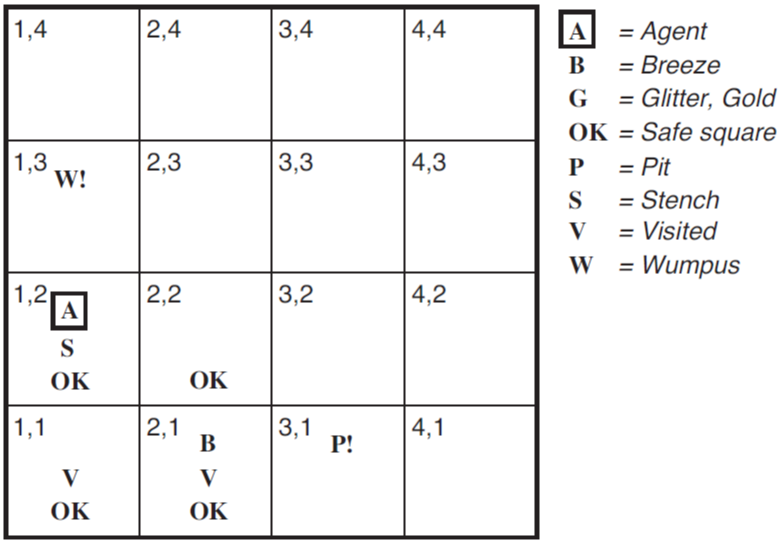

Figure 1: From [AIMA, Fig. 7.4a, p. 239].

Each of these can contain a pit, and at most one can contain a wumpus. Following the example the slide “Entailment in the wumpus world, contd.”, construct the set of possible worlds (you should find 32 of them).

Mark the worlds in which the KB is true and those in which each of the following sentences is true:

- α2 = “There is no pit in [2,2].”
- α3 = “There is a wumpus in [1,3].”

Hence show that KB ⊨ α2 and KB ⊨ α3.

[4] Exercise 7.1 from [AIMA].

2. Formulating sentences in first-order logic

2.1 Hier das neueste aus dem Land der Bloffs und Würgel[5]

- *Zu jedem Würgel gibt es einen Bloff, der von diesem Würgel gepfennert wird.*
- *Wenn irgendein Bloff nausert, dann nausern alle Bloffs. (Ausgesprochen merkwürdig!)*
- *Wenn es für jeden Bloff einen Würgel gibt, der diesen Bloff pfennert, dann nausern alle Würgel.*

Formalisieren Sie diese Aussagen mit Hilfe der folgenden Prädikate:

- IstBloff(X), IstWuergel(x), Pfennert(x, y), Nausert(x)

2.2 Hier sind Neuigkeiten aus Bloffonien[6]

- *Jeder Bloff, der nörgt, klüpft einen Würgel.*
- *Prumm ist ein Bloff, der keinen Würgel klüpft.*

Formalisieren Sie diese beiden Aussagen als Sätze des Prädikatenkalküls erster Stufe. Verwenden Sie die Prädikate Bloff(x), Noergt(x), Wuergel(y) und Kluepft(x, y).

[5] From exam «Methoden der KI», 01.10.1997.
[6] From exam «Methoden der KI», 30.01.1997.

2.3 Heute dürfen wir die Bloffs zuhause besuchen[7]

- *Wenn ein Bloff im Horg pummert, dann ist der Horg noch nicht suggi.*
- *Es gibt Bloffs, deren Horg schon suggi ist, die aber in einem anderen Horg noch pummern.*
- *Niemals pummert ein Würgel in einem Horg, in dem bereits ein Bloff pummert.*

Formalisieren Sie diese Aussagen mit Hilfe der folgenden Prädikate:

- IstBloff(x), IstHorg(x), IstWuergel(x), PummertIn(x, y), IstSuggi(x), IstGleich(x, y)

3. Inference in logical sentences

3.1 Die possierlichen Bloffs benehmen sich ausgesprochen merkwürdig[8] (FOL)

- *Wenn ein Bloff rüpft, dann nörgt er auch.*
- *Wenn ein Bloff nörgt und zinnt, dann gängert er.*

Obwohl die Bloffs sehr scheu sind, kennen wir einen bestimmten Bloff ein bisschen genauer:

- *Prumm ist ein Bloff, der zinnt, aber nicht gängert.*

Wandeln Sie die drei Aussagen in Klauseln um.

[7] From exam «Methoden der KI», 26.01.2001.
[8] From exam «Methoden der KI», 26.09.1996 (?).

Beweisen Sie durch Wiederspruch in der Klauselmenge: *«Prumm rüpft nicht»*.

3.2 On unicorns[9] (propositional logic)

Given the following, can you prove that the unicorn is mythical? How about magical? Horned?

- *If the unicorn is mythical, then it is immortal, but if it is not mythical, then it is a mortal mammal.*
- *If the unicorn is either immortal or a mammal, then it is horned.*
- *The unicorn is magical if it is horned.*

[9] Exercise 7.2. from [AIMA], adapted from Barwise and Etchemendy (1993).